Exercices - Groupes - corrigé

Ex1.1 On a :

$$bab = (aa^{-1})(bab) = a\underbrace{(a^{-1}ba)}_{=b^{-1}}b = ab^{-1}b = a$$

et $$aba = (bb^{-1})(aba) = b\underbrace{(b^{-1}ab)}_{=a^{-1}}a = ba^{-1}a = b.$$

d'où $$ab = (bab)(aba) = b\underbrace{(aba)}_{=b}ba = b^3a$$

et $$ba = (aba)(bab) = a\underbrace{(bab)}_{=a}ab = a^3b$$

Donc
$$a = b\underbrace{ab}_{=b^3a} = b^4a \quad \text{et} \quad b = a\underbrace{ba}_{=a^3b} = a^4b.$$

Puis, il vient $b^4 = e$ et $a^4 = e$

Ex1.2 D'après l'associativité de loi du groupe G, on a

$$(ab)^n = \underbrace{(ab).(ab)\ldots(ab)}_{n-\text{termes}}$$

$$= a\underbrace{(ba)(ba)\ldots(ba)}_{n-1-\text{termes}}b = a(ba)^{n-1}b$$

Comme $(ab)^n = e$, alors $a(ba)^{n-1}b = e$ et donc

$$a^{-1}\left[a(ba)^{n-1}b\right]b^{-1} = a^{-1}b^{-1}$$

d'où $$(ba)^{n-1} = a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1}$$

d'où $$(ba)(ba)^{n-1} = (ba)(ba)^{-1} = e.$$

Donc $$(ba)^n = e$$

Ex1.3 À vérifier en exercice que la loi $*$ est associative, d'élément neutre $e = (1,0)$ et que le symétrique de tout $(x,y) \in G = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est l'élément $\left(\frac{1}{x} ; -\frac{y}{x}\right)$.

Ex 1.4 # Soit e l'élément neutre de G, on a :

$$ea = a = ae$$

d'où $e \in H_a$ et donc $H_a \neq \emptyset$

soient x et y quelconques de H_a, on a

$$\begin{aligned}(xy)a &= x(ya) && \text{(par associativité)}\\ &= x(ay) && \text{(puisque } y \in H_a)\\ &= (xa)y && \text{(par associativité)}\\ &= (ax)y && \text{(puisque } x \in H_a)\\ &= a(xy) && \text{(par associativité)}\end{aligned}$$

d'où $xy \in H_a$.

soit x quelconque de H_a, on a:

$$xa = ax$$

d'où $x^{-1}(xa) = x^{-1}(ax)$

d'où $(x^{-1}x)a = (x^{-1}a)x$ (puisque $x^{-1}x = e$)

d'où $a = (x^{-1}a).x$

d'où $ax^{-1} = (x^{-1}a)(xx^{-1})$ (puisque $xx^{-1} = e$)

d'où $ax^{-1} = x^{-1}a$

donc $x^{-1} \in H_a$

Finalement, on conclut que H_a est un sous-groupe de G.

Ex 1.5 • 1 désigne l'élément neutre de G, on a.

$1^n = \underbrace{1.1 \ldots .1}_{n \text{ fois}} = 1$ d'où $1 \in R_n$ et donc $R_n \neq \emptyset$.

soient a et b quelconques de R_n, alors on a

$$\begin{aligned}(ab^{-1})^n &= a^n (b^{-1})^n && \text{(puisque } G \text{ est commutatif)}\\ &= (b^{-1})^n && \text{(puisque } a^n = 1 \ (a \in R_n))\\ &= (b^n)^{-1} &&\\ &= 1 && \text{(puisque } b^n = 1 \ (b \in R_n))\end{aligned}$$

Scanné avec CamScanner

Donc $ab^{-1} \in R_n$

et alors R_n est un sous-groupe de G

EX1.6 À vérifier en exercice.

EX1.7 si $A \subset B$ ou $B \subset A$, on a

$A \cup B = B$ ou $A \cup B = A$

et donc $A \cup B$ est un sous-gpe de G

Inversement, soit $A \cup B$ sous-gpe de G et supposons par l'absurde que $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$

c-à-dire $(\exists x \in A)$; $x \notin B$ et $(\exists y \in B)$; $y \notin A$

d'où $x \in A \subset A \cup B$ et $y \in B \subset A \cup B$.

Comme $A \cup B$ est un sous-gpe de G, alors

$$xy \in A \cup B$$

d'où $xy \in A$ ou $xy \in B$.

Alors si $xy \in A$, A est un sous-gpe alors

$$y = \underset{\underset{A}{\cap}}{x^{-1}} \underset{\underset{A}{\cap}}{(xy)} \in A \quad \text{absurde}$$

si $xy \in B$, B est un sous-gpe contenant y^{-1} et (xy), alors

$$x = (xy)\,y^{-1} \in B \quad \text{absurd}$$

Finalement, on a

$$A \cup B \text{ sous-gpe de } G \iff A \subset B \text{ ou } B \subset A.$$

EX1.8 À vérifier en exercice

EX1.9 Puisque f est un morphisme de gpes, alors $f(G)$ est un sous-gpe de G'. Soient x et y quelconque de G, on a

$f(x)f(y) = f(y)f(x) \iff f(xy) = f(yx)$ (puisque f morphisme)

$\iff f(xy)\left(f(yx)\right)^{-1} = e'$ (e' élément neutre de G')

$\iff f(xy)\, f((yx)^{-1}) = e'$

$\iff f(xy)\, f(x^{-1}y^{-1}) = e'$ (car $(yx)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$)

$\iff f(xyx^{-1}y^{-1}) = e'$

$\iff xyx^{-1}y^{-1} \in \mathrm{Ker}(f)$

Donc $(f(G),.)$ est commutatif si et seulement si

$\forall x,y \in G$; $xyx^{-1}y^{-1} \in \mathrm{Ker}(f)$ c-à-dire $C \subset \mathrm{Ker}(f)$

Or $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-gpe de G et donc.

$$Gr(C) \subset \mathrm{Ker}(f)$$

Conclusion :

$(f(G),.)$ commutatif $\iff Gr(C) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

EX 1.10 À faire en exercice.

EX 1.12 À vérifier en exercice.

EX 1.13 : 1) Le nombre d'inversions pour σ est

$$6+4+4+1+2+1 = 18$$

d'où sa signature est

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{18} = 1$$

c'est une permutation paire.

2) Il suffit de vérifié que

$$\sigma \circ \sigma' = \tau_{25} \text{ et } \sigma' \circ \sigma = \tau_{34}$$

Ex 1.14 # On vérifie que

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

et une décomposition de σ au produit de cycles disjoints est

$$\sigma = (1,2,3,7) \circ (4,5,6)$$

d'où la signature de σ est :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma) &= \varepsilon(1,2,3,7) \times \varepsilon(4,5,6) \\ &= (-1)^{4-1} \times (-1)^{3-1} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Une autre manière, consiste à remarquer que

$$\begin{aligned} \sigma &= (1,3,7,2) \circ (4,5,1) \circ (6,1,5,3,7) \circ (1,3,5,7,2) \\ &= \underbrace{(1,3,5,7,2)}_{=\sigma_1} \circ \underbrace{(6,1,5,3,7)}_{=\sigma_2} \circ \underbrace{(4,5,1)}_{=\sigma_3} \circ \underbrace{(1,3,7,2)}_{=\sigma_4} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \xrightarrow{\sigma_1} & 3 & \xrightarrow{\sigma_2} & 7 & \xrightarrow{\sigma_3} & 7 & \xrightarrow{\sigma_4} & 2 \\ 2 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 5 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 3 \\ 3 & \longrightarrow & 5 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 7 \\ 4 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 5 & \longrightarrow & 5 \\ 5 & \longrightarrow & 7 & \longrightarrow & 6 & \longrightarrow & 6 & \longrightarrow & 6 \\ 6 & \longrightarrow & 6 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 4 \\ 7 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

d'où
$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma) &= \varepsilon(\sigma_1) \times \varepsilon(\sigma_2) \times \varepsilon(\sigma_3) \times \varepsilon(\sigma_4) \\ &= (-1)^4 \times (-1)^4 \times (-1)^2 \times (-1)^3 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Ex 1.15 soient $\tau_1 = (i,j)$ et $\tau_2 = (u,v)$ deux ~~permuta~~ transpositions, alors, on a :

Si $\{i,j\} = \{u,v\}$, alors $\tau_1 = \tau_2$ et donc

$$\tau_1 \circ \tau_2 = Id$$

Si $\mathrm{Card}\{i,j,u,v\}=3$, alors $i=u$ par exemple avec i, j et v deux à deux distincts, alors

$$\begin{array}{ccccc} i & \xrightarrow{\tau_2} & v & \xrightarrow{\tau_1} & u \\ j & \longrightarrow & j & \longrightarrow & i \\ v & \longrightarrow & i & \longrightarrow & j \end{array}$$

et donc $\sigma=\tau_1\circ\tau_2=(i,v,j)$ (cycle)

d'où $\sigma^3=(\tau_1\circ\tau_2)^3=\mathrm{Id}$.

Si $\mathrm{Card}\{i,j,u,v\}=4$, alors $\{i,j\}\cap\{u,v\}=\emptyset$

Or deux cycles à support disjoints commutent et donc

$$\begin{aligned}\sigma^2=(\tau_1\circ\tau_2)^2&=\tau_1^2\circ\tau_2^2\\&=\mathrm{Id}\circ\mathrm{Id}\\&=\mathrm{Id}.\end{aligned}$$

EX 1.16 À faire en exercice.

EX 1.17 Remarquer que $6\xrightarrow{\sigma}10\xrightarrow{\sigma}6$, alors

$$\sigma_1=(10,6)\circ\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\9&4&3&8&7&6&1&2&5&10\end{pmatrix}$$

Comme 3, 6 et 10 sont invariants, alors σ_1 s'identifie à

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&4&5&7&8&9\\9&4&8&7&1&2&5\end{pmatrix}$$

Remarquer que $\sigma_1(9)=5$, ~~Alors~~

$$(9,5)\circ\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&4&5&7&8\\5&4&8&7&1&2\end{pmatrix}=\sigma_2$$

Remarquer que $\sigma_2(8)=2$, alors

$$(8,2)\circ\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&4&5&7\\5&4&2&7&1\end{pmatrix}=\sigma_3$$

Remarquer que $\sigma_3(7)=1$, alors

$$(7,1)\circ\sigma_3=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\5&4&2&1\end{pmatrix}=\sigma_4$$

Remarquer que $\sigma(5) = 1$, alors

$$(5,1) \circ \sigma_4 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = (2,4)$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}(2,4) &= (5,1) \circ \sigma_4 \\ &= (5,1) \circ (7,1) \circ \sigma_3 \\ &= (5,1) \circ (7,1) \circ (8,2) \circ \sigma_2 \\ &= (5,1) \circ (7,1) \circ (8,2) \circ (9,5) \circ \sigma_1\end{aligned}$$

d'où

$$(2,4) = (5,1) \circ (7,1) \circ (8,2) \circ (9,5) \circ (10,6) \circ \sigma$$

$$\sigma = (10,6)(9,5) \circ (8,2) \circ (7,1) \circ (5,1) \circ (2,4)$$

et alors $\qquad \varepsilon(\sigma) = (-1)^6 = 1$.